Mercredi
10-02-2021

Mathématique pour la physique.

I- Calcul différentiel

Le but de cette partie est d'initier l'étudiant à l'utilisation des différentiels. Pour les fonctions d'une variable réelle, la notion de dérivabilité se confond à la notion de différentiabilité. Par contre pour les fonctions de plusieurs variables réelles apparaît la notion nouvelle de dérivée partielle

1) Fonction de plusieurs variables réelles

1-1) Définition

On ~~observe~~ note $\mathbb{R}^n = \underbrace{\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \ldots \mathbb{R}}_{n \text{ fois}}$

$$x \in \mathbb{R}^n \Rightarrow x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

avec $x_i \in \mathbb{R}$ $\forall i = 1, \ldots, n$ $\mathbb{R}^n$ est donc l'ensemble des n-uplets de réel

De la même façon que l'on définie les fonctions d'une variable réelle, on peut définir les fonctions de plusieurs variables réel par :

$$f : \begin{array}{l} E \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R} \\ x = (x_1, x_2, x_n) \longmapsto f(x) = f(x_1, x_2, \ldots) \end{array}$$

En pratique on travaillera le plus souvent avec $n = 2$ ou 3. On utilisera les notations (x_1, x_2) ou (x, y) et (x_1, x_2, x_3) ou (x, y, z)

Exemples :

* la longueur (norme) d'un vecteur peut s'exprimer par la fonction f_1 définie par :

$$f : \mathbb{R}^n \longmapsto \mathbb{R}$$
$$x$$

$$f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto f(x) = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

* la température T en un point de l'espace est fonction de la position de la position géographique (x, y, z) et temps t. Ainsi, on a

$$T : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(x, y, z, t) \longmapsto T(x, y, z, t)$$

1-2) Fonctions à deux variables ou trois variables.

Les fonctions f et g données respectivement par :

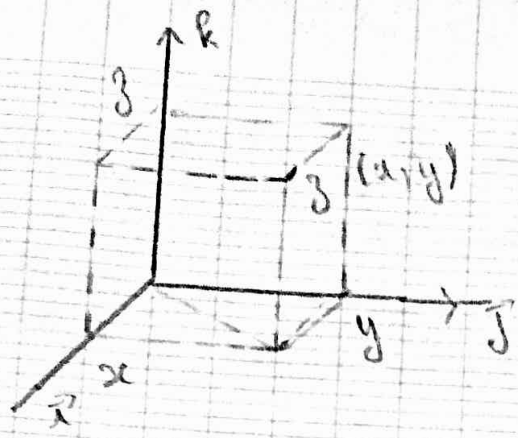
$$f : \mathbb{R}^2 \xrightarrow{f} \mathbb{R}$$
$$(x, y) \longmapsto (x, y) = x^2 + y^2 + 3xy$$

et

$$g : \mathbb{R}^3 \longmapsto \mathbb{R}$$
$$(x, y, z) \longmapsto g(x, y, z) = xyz$$

sont respectivement des fonctions de deux variables et trois variables

– La représentation en trois-D (3-D) se fait en perspective dans $\mathbb{R}^3$ par la surface formé des points $(x, y, z(x, y)$



– Représentation des lignes de niveau.

Pour la représentation par ligne de niveau d'une fonction de $\mathbb{R}^2$. On trace dans le plan les lignes isovaleurs (ligne de même niveau de la fonction)

Par exemple l'isoligne de niveau $k \in \mathbb{R}$ et l'ensemble $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / f(x,y) = k\}$ si

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(x,y) \longmapsto x^2+y^2$$

; l'isoligne de niveau $k \geq 0$ est $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x^2+y^2=k\}$

C'est le cercle de centre 0 et de rayon $\sqrt{k}$

2) Dérivation d'une fonction de plusieurs variables réelles

2-1- Dérivée première

Soit $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction

$e = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$ et a un vecteur de $\mathbb{R}^n$

Définition

Soit d un vecteur de $\mathbb{R}^n$, on appelle dérivée directionnelle de f au point a dans la direction du vecteur d, le nombre noté $\frac{\partial f}{\partial d}(a)$ (dérivée de f par rapport à d au point a)

et définie par :

$$\frac{\partial f}{\partial d}(a) = \lim_{\lambda \to 0} \frac{f(a+\lambda d) - f(a)}{\lambda}$$

$$= \lim_{\lambda \to 0} \frac{f(a_1+\lambda d_1, \dots, a_n+\lambda d_n) - f(a_1, \dots$$

Si la derivée directionnelle existe alors elle est une fonction de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ d

$$\frac{\partial f}{\partial d} : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto \frac{\partial f}{\partial d}(x)$$

Exemple:

En physique on parle souvent de derivée normale ou de derivée tangentielle pour designé la dérivée directionnelle en un point d'une courbe d'une surface donnée dans la direction normale ou tangente à cette courbe ou cette surface

Définition 2

On appelle dérivée partielle première de la fonction f par rapport à la i-ème variable x_i, la derivée directionnelle de f dans la direction e_i.

Cette derivée est noté $\frac{\partial f}{\partial x_i}$

Dans la pratique on calcul $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ comme une derivée première classique dans $\mathbb{R}$.

Mais en supposant $x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n$ constante et on derive par rapport à x_i

Définition 3

le vecteur $\Big(\frac{\partial f}{\partial d}$

le vecteur $\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a); \frac{\partial f}{\partial x_2}(a), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(a)\right)$ est appelé gradient de f au point a, noté grad $f(a)$ ou ~~$\Delta f(a)$~~ $\nabla f(a)$

Si $\nabla f(a)$ est existe alors :

$$\frac{\partial f}{\partial d}(a) = \nabla f(a).d = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a).d_i$$

Définition 4

On dit qu'une fonction f de $\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ est partiellement dérivable si et seulem si ses dérivées partielles (première en a par rapport à chaque variable x_i) existe. f est continument, partiellement dérivable en a si et seulem si chaque dérivée partielle existe au voisinage de a et est continue en a. On dit alors f est de classe C^1

Exemple :

On considère les fonctions f et g de $\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ /

$f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$ et $g(x,y) = x^2\sqrt{y}$

1) Calculer les dérivées partielles première de f et g

2) Soit $d = \left(\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

Calculer les dérivées directionnelles de f et g par rapport à la direction d au point (x,y)

Corrigé

$f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$

1- Calculons les dérivées partielles première.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\frac{\partial}{\partial x}(x^2+y^2)}{2\sqrt{x^2+y^2}}$$

Mardi
16/02/2020

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{2x}{2\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$= \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \text{ avec } (x,y) \neq (0,0)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\frac{\partial}{\partial y}(x^2+y^2)}{2\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}}, \text{ avec } (x,y) \neq (0,0)$$

$$g(x) = x\sqrt{y}$$

$$\frac{\partial g(x,y)}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(x\sqrt{y})$$

$$\frac{\partial g(x,y)}{\partial x} = \sqrt{y}$$

$$\frac{\partial g(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(x\sqrt{y})$$

$$\boxed{\frac{\partial g}{\partial y} = \frac{x}{2\sqrt{y}}} \quad \text{avec } y \neq 0$$

2) Calculons les dérivées directionnelles de f et g par rapport au point (x,y) d

$$d = \left(\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$\frac{\partial f}{\partial d}(x,y) = \nabla f(x,y) \cdot d$$

$$\nabla f(x,y).l = \begin{pmatrix} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$$

$$= \frac{x}{2\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{\sqrt{2}\,y}{2\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial d}(x,y) = \nabla f(x,y) = \frac{x+\sqrt{2}y}{2\sqrt{x^2+y^2}}} \quad ; \text{ avec } (x,y) \neq (0,0)$$

$$\frac{\partial g}{\partial d}(x,y) = \nabla g(x,y) . d$$

$$= \begin{pmatrix} \sqrt{y} \\ \frac{x}{2\sqrt{y}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$$

$$= \frac{\sqrt{y}}{2} + \frac{\sqrt{2}\,x}{4\sqrt{y}}$$

$$= \frac{2\sqrt{y} \times \sqrt{2}}{4\sqrt{y}} + \frac{x\sqrt{2}}{4\sqrt{y}}$$

$$= \frac{2y}{4\sqrt{y}} + \frac{x\sqrt{2}}{4\sqrt{y}}$$

$$\boxed{\frac{\partial g}{\partial d}(x,y) = \frac{2y+x\sqrt{2}}{4\sqrt{y}}} \quad ; \text{ avec } y \neq 0$$

Définition 5

Soit f une fonct° de classe C^1 sur un voisinage de $a \in \mathbb{R}^n$. On appelle différentiel de f au point a l'application linéaire notée $df(a)$ et définie par :

$$df(a) : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto df(a)(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) . \cancel{x}(x_i)$$

Exemple

Soit $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$
$$(x, y, z) \longmapsto x^3 y - y + x\sqrt{z}$$

Calculer $df(a)(x)$ avec $a = (a_1, a_2, a_3)$

Corrigé

$$df(a)(x, y, z) = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) . x_i$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x) = 3x^2 y + \sqrt{z}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a) = 3a_1^2 a_2 + \sqrt{a_3}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(a) = a_1^3 - 1$$

$$\frac{\partial f}{\partial z}(a) = \frac{a_1}{2\sqrt{a_3}} \; ; \; a_3 \neq 0$$

$$df(a)(x) = \nabla f(a) . x$$

$$\begin{pmatrix} 3a_1^2 a_2 + \sqrt{a_3} \\ a_1^3 - 1 \\ \frac{a_1}{2\sqrt{a_3}} \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$df(a)(x) = x(3a_1^2 a_2 + \sqrt{a_3}) + (a_1^3 - 1)y + z\left(\frac{a_1}{2\sqrt{a_3}}\right)$$

2) 2 - Dérivées partielles d'ordre supérieur

Soit $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$

Définition 6

Soit $\{i_1, i_2, ..., i_k\} \subset \{1; 2; ...; n\}$

On dit que la fonction f admet une dérivée partielle d'ordre k au point $a \in \mathbb{R}^n$ par rapport au variable x_1, x_2 ...; x_{ik} si et seulement si les dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x_i}$; $\frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\partial f}{\partial x_{i1}}\right), ..., \frac{\partial}{\partial x_{ik}}\left(\frac{\partial}{\partial x_{ik-1}} ... \left(\frac{\partial f}{\partial x_{i1}}\right)\right)$.

Plus simplement la dérivée d'ordre k de la fonction f est notée

$$\frac{\partial^k f}{\partial x_{ik} \partial x_{ik-1} \cdots \partial x_{i1}}$$

Pour $n = 2$, les dérivées partielles d'ordre 2 sont :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} ; \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} ; \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} ; \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

Proposition (théorème de Schwarz)

Si f est de classe C^1 sur un sous ensemble $E \in \mathbb{R}^n$ et si les dérivées $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$ existent sur $E \in \mathbb{R}^n$ et continue en $a \in \mathbb{R}^n$ alors $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$

Plus généralement pour une fonction f de classe C^k l'ordre de dérivation dans le calcul des dérivées partielles n'a pas d'importance

Exemple

Soit f une fonction de trois variables définie par
$f(x,y,y) = x^y \sqrt{z}$

Calculer les dérivées partielles première et seconde de f

Corrigé

$f(x,y,z) = x^y \sqrt{z}$

$Df = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / x > 0 ; z \geq 0\}$

$Df = \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$

$f(x,y,z) = e^{y \ln x} \sqrt{z}$

La fonction f est de classe C^2

les dérivées partielles premières

$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = \frac{y}{x} e^{y \ln x} \sqrt{z}$

$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = \ln x \, e^{y \ln x} \sqrt{z}$

$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = \frac{e^{y \ln x}}{2\sqrt{z}} \; ; \; z \neq 0$

les dérivées partielles seconde

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y,z) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z)\right)$

$= -\frac{y}{x^2} e^{y \ln x} \sqrt{z} + \frac{y^2}{x^2} e^{y \ln x} \cdot \sqrt{z}$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y,z) = (y-1) \frac{y}{x^2} e^{y \ln x} \sqrt{z}$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z)\right) = \frac{1}{x} e^{y\ln x}\sqrt{z} + \frac{y\ln x}{x} e^{y\ln x}\sqrt{z}$$

$$= (1 + y\ln x)\frac{1}{x} e^{y\ln x}\sqrt{z}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x}(x,y,z) = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z)\right)$$

$$= \frac{y}{2x\sqrt{z}} e^{y\ln x} \; ; \; z \neq 0$$

2 - 3) Règle de calcul sur les différentielles

* Règle élémentaire

Si f et g sont différentiable sur un domaine D, alors on a :

- $d(f+g) = df + dg$
- $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \; d(\lambda f) = \lambda df$
- $d(f \cdot g) = df \cdot g + f \, dg$.
- $\forall n \in \mathbb{N}^+, \; d(f^n) = n f^{n-1} df$
- $d\left(\frac{1}{f}\right) = -\frac{df}{f^2} \; (f(x) \neq 0 \; \forall x \in D)$

* Différentielle logarithmique

Soit $f \neq 0$, $\frac{df}{f}$ est une différentielle logarithmique de f et la terminologie vient de ce que

$$d(\ln|f|) = \frac{df}{f}$$

Cette différentielle est intéressante à utiliser lorsque f se présente sous la forme d'un produit, d'un quotient de fonction.

Exemple.

On pose $f(x) = \sqrt{x^2 \cos x}$; $x \in]-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}[$

Calculer df et $d(\ln f(x))$

Corrigé.

$$df(x) = \frac{2x\cos x - x^2 \sin x}{2\sqrt{x^2 \cos x}}$$

$$d(\ln f(x)) = d\left(\frac{1}{2}\ln(x^2 \cos x)\right)$$

$$= d\left(\ln x + \frac{1}{2}\ln \cos x\right)$$

$$= \frac{1}{x} - \frac{1}{2}\frac{\sin x}{\cos x}$$

$$d(\ln(f(x))) = \frac{1}{x} - \frac{1}{2}\tan x$$

Mercredi 17-02-2020

2-4) Incertitude

Une donnée physique, une mesure, un nombre sur ordinateur ne sont jamais connues avec une précision infinie

Par exemple en électricité, supposons que l'on mesure une resistance R et l'intensité I qui la traverse. On suppose que la tension U aux bornes de cette resistance verifie la loi d'ohm $U = R.I$

Si la resistance R est connue avec une incertitude de $\Delta R > 0$ alors la vraie valeur R_0 de la resistance sera dans l'intervalle :

$R_0 \in [R - \Delta R ; R + \Delta R]$.

Si de même l'intensité est comme avec une incertitude $\Delta I > 0$, la vraie valeur I_0 de cette I sera

$I_0 \in [I - \Delta I ; I + \Delta I]$

$U_0 = R_0 I_0$
$\leq (R+\Delta R)(I+\Delta I)$
$\leq RI + R\Delta I + R\Delta I + \Delta^2 RI \quad (*)$
$U_0 = R_0 I_0$
$\geq (R-\Delta R)(I-\Delta I)$
$\geq RI - R\Delta I - \Delta RI + \Delta R \Delta I \quad (**)$

De $(*)$ et $(**)$, on a :
$U_0 \in [RI + R\Delta I + R\Delta I + \Delta R\Delta I ; RI - R\Delta I - R\Delta I + R\Delta I\Delta]$
comme ΔR et ΔI sont généralement très petite. On peut negliger $\Delta R . \Delta I$ par rapport à $R\Delta I$ et $I\Delta R$ on aura donc
$U_0 \in [RI - R\Delta I - \Delta RI ; RI + R\Delta I + \Delta RI]$
$\Rightarrow U_0 \in [U - \Delta U ; + U + \Delta U]$ avec $\Delta U = R\Delta I + \Delta RI$

En s'inspirant de ces notions d'incertitude on donnera des régles de calcul d'incertitude en s'appuyant sur les notions de dérivée et de différentielle.

Définition ?
Soit X une grandeur, on dit que X est connue avec une incertitude $\Delta X \geq 0$ si la vraie valeur X_0 de X est $X_0 \in [X - \Delta X ; X + \Delta X]$

$*$ Incertitude pour fonction d'une variable réelle
Supposons que l'on connaisse une grandeur x avec une incertitude $\Delta x \geq 0$. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction. On s'interesse donc à l'incertitude Δf de la grandeur $y = f(x)$
Soit $h / |h| \leq \Delta x$; $f(x_0 + h) \simeq f(x_0) + h f'(x_0)$
soit x_0 la vraie valeur de x alors $y_0 = f(x_0)$ est la vraie valeur de y.
$f(x) = f(x_0) + (x - x_0) f(x_0) + o(x - x_0)$

$$f(x)-f(x_0) = h\, f'(x_0)$$
$$\Rightarrow |f(x)-f(x_0)| \leq |h|\,|f'(x_0)|$$
$$\Rightarrow y_0 \in [\, y - |h|\,|f'(x_0)| \; ; \; y + |h|\,|f'(x_0)| \,]$$

En posant $|h| = \Delta x$, on a :

$$|f(x) - y_0| \leq \Delta x\, |f'(x_0)|$$

$$y_0 \in \; y_0 = f(x_0) \in [\, f(x) - \Delta x\,|f'(x_0)| \; ; \; f(x) + \Delta x\,|f'(x_0)| \,]$$

On en déduit que

$$\Delta f = \Delta x\, |f'(x_0)|$$

* Incertitude pour une fonction de plusieurs variables.

Si l'on a n grandeurs $x_1, x_2, \dots, x_n$ avec une incertitude pour chaque grandeur alors la fonction :

$$f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(x_1, \dots, x_n) \longmapsto (x_1, x_2, \dots x_n)$$

admet une incertitude Δf tel que

$$\Delta f \leq \sum_{i=1}^{n} \left| \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) \right| \Delta x_i$$

$$\leq \sum_{i=1}^{n} \left| \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) . \Delta x_i \right|$$

Exemple.

$$U(R, I) = R I$$

$$\Delta U \leq \frac{\partial U}{\partial R} \Delta R + \frac{\partial U}{\partial I} \Delta I \qquad \cancel{\Delta U} \leq \frac{\partial U}{\partial R} \qquad \boxed{\Delta U \leq I\Delta R + R\Delta I}$$

Contrairement aux incertitudes des fonctions d'une variable, on a une majoration de l'incertitude dans le cas des fonctions de plusieurs variables

Exemple.

considérons un gaz parfait vérifiant

$$PV = nRT \text{ , où}$$

P : est la pression du gaz (en pascale)
V : est le volume occupé par le gaz (en m^3)
n : est la quantité de matière (en moles)
T : est la température (en Kelvins)
R : est la constante universelle des gaz parfaits (8,3144621 J/K/mol)

Ainsi, on a :

$$V = \frac{nRT}{P}$$

la constante R est connue avec précision quasi-infinie.

On considère que l'on connait les incertitudes Δn, ΔP et ΔT. On cherche à calculer l'incertitude sur le volume

$$\Delta V \leq \left|\frac{\partial V}{\partial n}\right| \Delta n + \left|\frac{\partial V}{\partial P}\right| \Delta P + \left|\frac{\partial V}{\partial T}\right| \Delta T$$

$$\frac{\partial V}{\partial n} = \frac{RT}{P} \; ; \; \frac{\partial V}{\partial P} = -\frac{nRT}{P^2} \; ; \; \frac{\partial V}{\partial T} = \frac{nR}{P}$$

$$\Delta V \leq \frac{RT}{P} \Delta n + \frac{nRT}{P^2} \Delta P + \frac{nR}{P} \Delta T$$

* Incertitude absolue.

l'incertitude ΔX pour une ~~valeur~~ grandeur X définie dans la définition 7 est appelée incertitude relative

Définition

Soit une grandeur positive X d'incertitude relative Δx. l'incertitude absolue sur X est donnée par $\frac{\Delta x}{x}$. Cette incertitude est sans dimension, elle ~~s~~permet des incertitudes d'unité différente

Dans l'exemple précédant (l'exemple du gaz parfait), l'incertitude absolue est donnée par $\frac{\Delta V}{V}$

$$\frac{\Delta V}{V} \leq \frac{\frac{RT}{P}\Delta n + \frac{nRT}{P^2}\Delta P + \frac{nR}{P}\Delta T}{\frac{nRT}{P}}$$

$$\frac{\Delta V}{V} \leq \frac{\Delta n}{n} + \frac{\Delta P}{P} + \frac{\Delta T}{T}$$

Plus généralement si $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ sont n réels et si $x_1, x_2, \dots, x_n$ sont strictement positif

$$f(x_1, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^{n} x_i^{\alpha_i} \text{ alors}$$

$$\frac{\Delta f}{f} \leq \sum_{i=1}^{n} \frac{\Delta x_i}{x_i}$$

II - Systèmes de coordonnées et repères associés.

2-1. Coordonnées cartésiennes

Un point M du plan ou de l'espace a pour coordonnée (x, y) ou (x, y, z) dans le repère (O, e_1, e_2) ou (O, e_1, e_2, e_3). Ainsi on a :

$OM = xe_1 + ye_2$ ou $OM = xe_1 + ye_2 + ze_3$

2-2. Coordonnées polaires

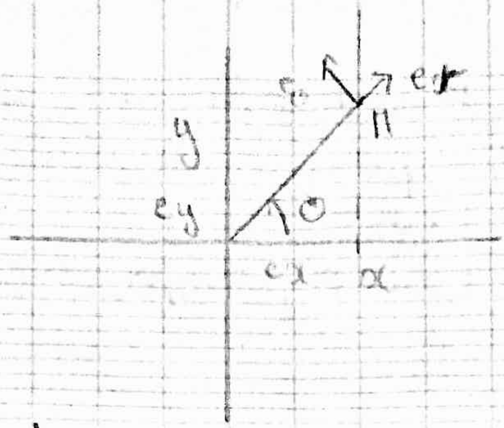
a) Coordonnées polaire globle

Soit M un point du plan de coordonnée cartésiennes (x, y). Ce point en coordonnée polaire est représenté par $M(r, \theta)$ avec

$x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$, $r \geq 0$

$\theta \in [0, 2\pi[$ et $r^2 = x^2 + y^2$

b) Coordonnées polaires locale.



le vecteur $\overrightarrow{OM}$ est une fonction de deux variables r et θ

$\overrightarrow{OM} = x\overrightarrow{e_x} + y\overrightarrow{e_y}$

$= r\cos\theta\,\overrightarrow{e_x} + \cancel{r\cos\theta}\ r\sin\theta\,\overrightarrow{e_y}$

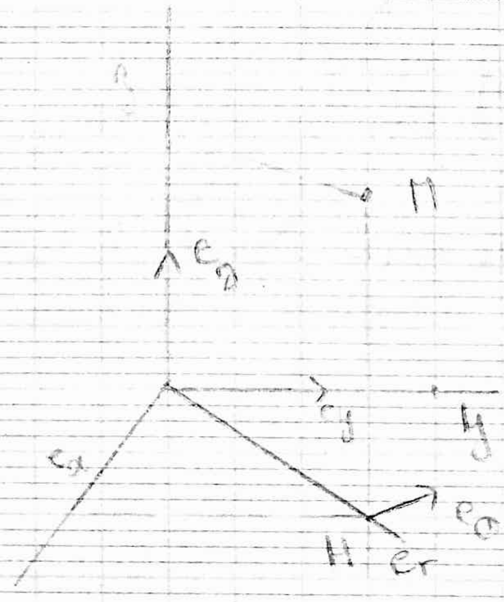
$$\overrightarrow{e_r} = \frac{\overrightarrow{OM}}{OM}$$

$$= \frac{1}{r}\left(r\cos\theta\,\overrightarrow{e_x} + r\sin\theta\,\overrightarrow{e_y}\right)$$

$$\overrightarrow{e_r} = \cos\theta\,\overrightarrow{e_x} + \sin\theta\,\overrightarrow{e_y}$$

$$\overrightarrow{e_r} = \frac{\partial\overrightarrow{er}}{\partial\theta} = -\sin\theta\,\overrightarrow{e_x} + \cos\theta\,\overrightarrow{e_y}$$

2-3) Coordonnées cylindriq



a)

a) Coordonnées cylindriq générale

Un point M de coordonnées (x, y, z) dans la base cartésienne est reperé en coordonné cylindrique par :

$$M \begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta, \quad r \geq 0, \; \theta \in [0, 2\pi[, \; z \in \mathbb{R} \\ z = z \end{cases}$$

H est le projeté orthogonale du point M sur le plan (O, x, y) et a pour coordonnées polaire (r, θ)

b) base locale cylindrique

La base locale cylindrique est noté $(\vec{e_r}, \vec{e_\theta}, \vec{e_z})$

$\vec{OH} = r\cos\theta\,\vec{e_x} + r\sin\theta\,\vec{e_y}$

$\vec{e_r} = \dfrac{\vec{OH}}{OH}$

$e_r = \cos\theta\, e_x + \sin\theta\, e_y$

$e_\theta = -\sin\theta\, e_x + \cos\theta\, e_y$

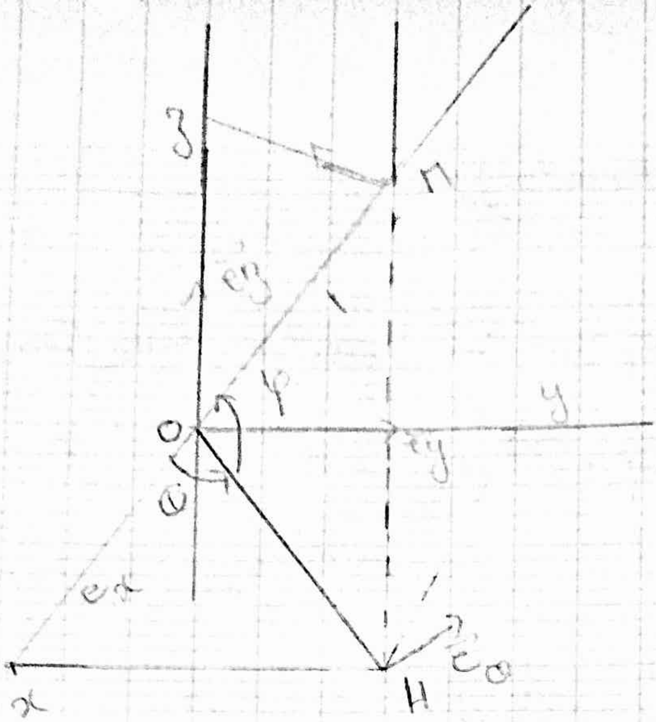
Remarque.

* lorsque $r = cste$, θ et z variant (en décrivant respectivement $[0; 2\pi[$ et $\mathbb{R}$) alors le point M décrit un cylindre

* En physique pour éviter la confusion avec le r des coordonnées sphérique on note $OH = \rho$

2) 4- Coodonnées sphériques

Mardi
13-02-2020



$$\vec{OH} = \rho\cos\theta\,\vec{e_x} + \rho\sin\theta\,\vec{e_y}$$
$$= r\cos\varphi\cos\theta\,\vec{e_x} + r\cos\varphi\sin\theta\,\vec{e_y}$$

$$M\begin{cases} x = r\cos\varphi\cos\theta \\ y = r\cos\varphi\sin\theta \\ z = r\sin\varphi \end{cases}, \quad r \geq 0,\ \theta \in [0;2\pi],\ \varphi \in [-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}]$$

Remarq.

Puisque que r est la longueur de OM, $\theta = (\widehat{\vec{e_x},\vec{OH}})$ et $\varphi = (\widehat{\vec{OM},\vec{OH}})$, $\rho = OH$ par conséquent $x = \rho\cos\theta$ $y = \rho\sin\theta$ or $\rho = r\cos\varphi$) donc $x = r\cos\varphi\cos\theta$, $y = r\cos\varphi\sin\theta$ et $z = r\sin\varphi$.

* Base locale.

Tout point de l'espace est reperé par $(e_r, e_\theta, e_\varphi)$

$$e_r = \frac{\vec{OM}}{OM} = \frac{1}{r}(r\cos\varphi\cos\theta\, e_x + r\cos\varphi\sin\theta\, e_y + r\sin\varphi\, e_z)$$

$$e_r = \cos\varphi\cos\theta\, e_x + \cos\varphi\sin\theta\, e_y + \sin\varphi\, e_z$$

$$e_\theta = -\sin\theta\, e_x + \cos\theta\, e_y$$

$$e_r = \frac{\partial e_r}{\partial \varphi}$$

$$\cancel{e_r = -\sin\varphi\cos\theta e_x + \cos\varphi\sin\theta e_y} + r\sin\varphi e_z$$

$$e_\varphi = -\sin\varphi\cos\theta e_x - \sin\varphi\sin\theta e_y + \cos\varphi e_z$$

Calculons $e_r \wedge e_\theta$

En général $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}$

$$e_r \wedge e_\theta = \begin{pmatrix} \cos\varphi\cos\theta \\ \cos\varphi\sin\theta \\ \sin\varphi \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\sin\varphi\cos\theta \\ -\sin\varphi\sin\theta \\ \cos\varphi \end{pmatrix}$$

$$e_r \wedge e_\theta = e_\varphi$$

Remarques

* Si $r =$ cste, θ et φ variable (en décrivant respectivem $[0 ; 2\pi[$ et $[-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}]$ le point M décrit alors un sphère

Parfois les notations sont legerément différente pour les coordonnées sphériques. Ainsi on pourra remplacé la latitude φ par la colatitude

$$\psi = \frac{\pi}{2} - \varphi.$$

II- les opérateurs différentiels.

la différentielle d'une fonction $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ est un opérateur différentiel puisqu'elle agit sur les dérivées de la fonction f. Dans cette partie nous parlerons des opérateurs les plus courants.

1- le gradiant

Définition

Soit $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, une fonction de classe C^1

On appelle gradiant de f au point x, le vecteur noté $\nabla f(x)$ ou $\mathrm{grad} f(x)$ et définie par:

$$\vec{\nabla} f(x) \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(x) \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n}(x) \end{pmatrix} \qquad \vec{\nabla} = \text{Opérateur nabla}$$

Dans un repère cartesien on note

$$\nabla \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial x_i} \\ \frac{\partial}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

Ce vecteur définit de l'emile de façon formelle permettra d'interpreter les propriétés des différentes opérateurs différentiels.

En dimension 3, on a:

$$\nabla f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} \\ \frac{\partial f}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f}{\partial x_3} \end{pmatrix} \quad f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} \\ \frac{\partial f}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f}{\partial x_3} \end{pmatrix}$$

Propriétés

Soient f et g deux fonctions de $\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ differentiable. Alors pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, on a :

$$\nabla(f+g)(x) = \nabla f(x) + \nabla g(x)$$

$$\nabla(\alpha f)(x) = \alpha \nabla f(x), \ \alpha \in \mathbb{R}^*$$

$$\nabla(fg)(x) = f(x)\nabla g(x) + g(x)\nabla f(x)$$

Exemple

On considère la fonction f de $\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ $(x,y,z) \longmapsto \frac{x}{y} - xz$

Calculer $\nabla f(x)$ tout point (x,y,z)

Solution

$$f(x,y,z) = \frac{x}{y} - xz$$

$$\nabla f(x,y,z) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) \\ \frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = \frac{1}{y} - z$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = -\frac{x}{y^2}$$
$$\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = -x$$

$$\nabla f(x,y,z) = \begin{pmatrix} \frac{1}{y} - z \\ \frac{-x}{y^2} \\ -x \end{pmatrix}$$

2) le rotationnel

En mécaniq des fluides, on parle de ~~vo~~ votex ou de tourbillon, ~~ceuk~~ ceux-ci sont mis en évidence par le rotationnel

Définition

Soit f un champ de vecteurs tel que $f(f_1, f_2, f_3)$
On appelle rotationnel de f et on note $\text{rot}\, f$ le vecteur dont les composantes sont données par:

$$\text{rot}(x,y,z) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} f_1(x,y,z) \\ f_2(x,y,z) \\ f_3(x,y,z) \end{pmatrix}$$

$$= \nabla \wedge f(x,y,z)$$

$$\operatorname{rot} f(x,y,z) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_3}{\partial y}(x,y,z) - \frac{\partial f_2}{\partial z}(x,y,z) \\ \frac{\partial f_1}{\partial z}(x,y,z) - \frac{\partial f_3}{\partial x}(x,y,z) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x}(x,y,z) - \frac{\partial f_1}{\partial y}(x,y,z) \end{pmatrix}$$

Exemple.

On donne

$$f(x,y,z) = \left(x^2y - e^3, \frac{x}{y} - xz, x\sqrt{z} - \frac{x}{y}\ y^2\right)$$

Calculer $\operatorname{rot}(x,y,z)$

corrigé

$$\operatorname{rot} f = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} x^2y - e^3 \\ \frac{x}{y} \cdot xz \\ x\sqrt{z} - y^2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x}(x\sqrt{z} - y^2) - \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{x}{y} \cdot xz\right) \\ \frac{\partial}{\partial z}(x^2y - e3) - \frac{\partial}{\partial x}(x\sqrt{z} - y^2) \\ \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{y} - xz\right) - \frac{\partial}{\partial y}(x^2y - e^3) \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{rot}\begin{pmatrix} -2y+x \\ -e^{3}-\sqrt{y} \\ \frac{1}{y}-z-x^2 \end{pmatrix}$$

Propriétés

Soient f et g deux champs de vecteur de classe C^1

$$\nabla \wedge (f(x)+g(x)) = \mathrm{rot}(f+g)(x)$$

$$\nabla \wedge (f(x)+g(x)) = (\nabla \wedge f(x)) + (\nabla \wedge g(x))$$
$$= \mathrm{rot} f(x) + \mathrm{rot}\, g(x)$$

$$\nabla \wedge (\alpha f(x)) = \mathrm{rot}(\alpha f(x))$$
$$= \alpha \nabla \wedge f(x)$$
$$= \alpha\, \mathrm{rot}\, f(x)$$

$$\nabla \wedge (f \cdot g)(x) = \mathrm{rot}(f \cdot g)(x)$$
$$= f(x)\, \nabla g(x) + g(x)\, \nabla f(x)$$
$$= f(x)\, \mathrm{rot}\, g(x) + g(x)\, \mathrm{rot}\, f(x)$$

3) La divergence

Définition

Soit $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ un champ de vecteur de classe C^1. On appelle divergence de f notée $\mathrm{div}\, f(x)$ la fonction de $\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$\mathrm{div}\, f(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial x_i}(x)$$
$$= \nabla \cdot f(x)$$

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial x_i} \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial x_n} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} f_1(x) \\ \vdots \\ f_i(x) \\ \vdots \\ f_n(x) \end{pmatrix}$$

Cet opérateur caractérise la convergence ou la divergence d'un champ de vecteur.

Propriétés

$$\operatorname{div}(f+g)(x) = \nabla\cdot(f+g)(x) = \nabla\cdot f(x) + \nabla\cdot g(x)$$

$$\operatorname{div}(f+g)(x) = \operatorname{div} f(x) + \operatorname{div} g(x)$$

$$\operatorname{div}(\alpha f(x)) = \nabla\cdot(\alpha f(x)) = \alpha\, \nabla\cdot f(x)$$

$$\operatorname{div}(\alpha f(x)) = \alpha \operatorname{div} f(x)$$

$$\operatorname{div}(f\cdot g)(x) = \nabla\cdot(f\cdot g)(x) = g(x)\,\nabla\cdot f(x) + \nabla\cdot f(x) : g(x)$$

$$\operatorname{div}(f\cdot g)(x) = g(x)\operatorname{div} f(x) + f(x)\operatorname{div} g(x)$$

Soient f et g deux champs vectoriels. Alo

$\nabla\cdot(f(x)\wedge g(x)) = \mathrm{div}(f\wedge g)(x)$
$= \cancel{\mathrm{div}}\; g(x)(\Delta\wedge f(x)) - f(x)(\cancel{\nabla}\wedge g(x)$

$\nabla\cdot(f(x)\wedge g(x)) = g(x)\,\mathrm{rot}\,f(x) - f(x)\,\mathrm{rot}\,g(x)$

2) le laplacien

Définition.

Soit $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonct$^{°}$ de classe C^2

On appelle laplacien de f la fonction de $\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ noté Δf définie par:

$$\Delta \cancel{f} f(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(x)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial f(x)}{\partial x_i}\right)$$

$$= \nabla\cdot(\nabla f(x))$$

$$= \nabla^2\cdot f(x)$$

$$\Delta f(x) = \mathrm{div}(\nabla f(x))$$

Les fonctions f vérifiants $\Delta f = 0$ sont appelées fonctions Harmonique. Elles interviennent notamment dans la résolution des équations des ondes et l'équation de la chaleur.

Propriétés

soient f et g deux champs scalaire

$$\Delta f(x) = \operatorname{div}(\nabla f(x))$$

$$\Delta(\alpha f(x)) = \alpha \Delta f(x), \quad \alpha \in \mathbb{R}^*$$

$$\Delta(f+g)(x) = \Delta f(x) + \Delta g(x)$$

Une fonct^{e} est dite de classe "C^1" si sa dérivée 1ère existe et si elle est continue.